

指数関数

指数関数 (exponential function) とは、冪乗における指数を変数として、その定義域を主に実数の全体へ拡張して定義される関数の一種で、対数関数の逆関数である。

ネイピア数 e とは

The exponential function arises whenever a quantity grows or decays at a rate proportional to its current value. One such situation is continuously compounded interest, and in fact it was this that led Jacob Bernoulli in 1683 to the number

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \quad : \text{定義式}$$

now known as e . Later, in 1697, Johann Bernoulli studied the calculus of the exponential function $f(x) = e^x$.

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$$

$f(x) = (1+x)^n$ の2項展開

原点 $x=0$ の周りで、 m 回微分する。

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = n$$

$$f''(0) = n \cdot (n-1)$$

$$f'''(0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

$$f^{(m)}(0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1) = n! / (n-m) !$$

n 次元の多項式であるので、次式で表わされると仮定する。

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots + a_n \cdot x^n$$

上式を m 回微分した係数と元の式を m 回微分した係数が一致するように a_m を決める。

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = 1 \cdot a_1$$

$$f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$$

$$f'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3$$

$$f^{(m)}(0) = m(m-1)(m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_m = m! \cdot a_m$$

係数は、

$$a_m = n! / \{ (n-m) ! m! \} = {}^n C_m \quad : n \text{個から } m \text{個選ぶ場合の数}$$

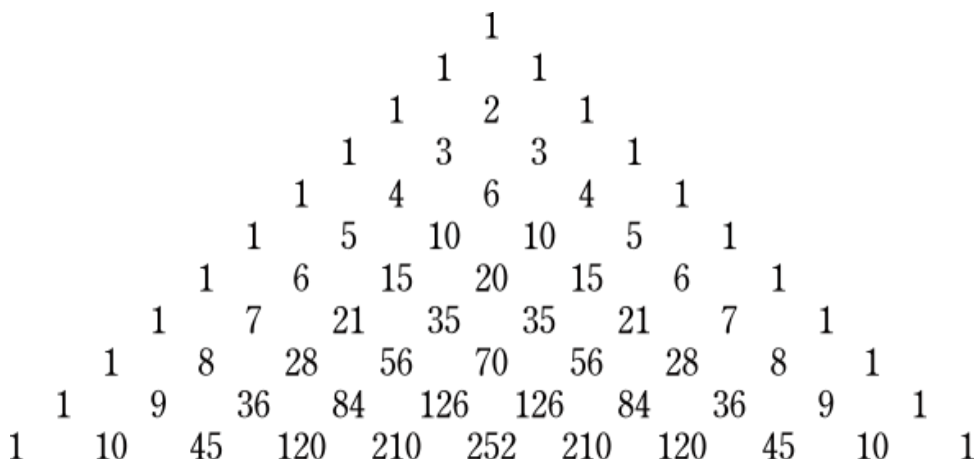
ゆえに、次の2項定理が成立する。

$$f(x)=(1+x)^n = \sum_{m=0}^n nCm \cdot x^m \quad (m=0\sim n \text{の総和})$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{n!}{(n-m)!m!} \cdot x^m + \dots + x^n$$

パスカルの三角形： $\frac{n!}{(n-m)!m!} = nCm$

2項係数で現れる nCk を n 段目の k 番目に配置（もちろん n も k も 0 から数え始める）した三角形をパスカルの三角形と呼ぶ。



ネイピア数の級数表示

ネイピア数は、定義より、上式の x に $1/n$ を代入して、 $n \rightarrow \infty$ にしたものである。そこで、 m 番目の項だけ、考える。

$$\frac{n!}{(n-m)!m!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^m = \frac{[n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)]}{m!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^m$$

$$= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

これは、 $n \rightarrow \infty$ の時、 $m!$ に収束するので

ネイピア数 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

指数関数の無限級数展開：マクローリン展開

指数関数の場合も、上と同様に、 $f(x)=(1+x)^n$ の x に x/n を代入して、 n を無限大に近づけることで求められる。

指数関数 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

これは、指数関数のマクローリン展開 と同じ結果を与える。微分を使わなくても、この展開式がえられる。

指数関数の微分

指数関数 e^x の微分は指数関数 e^x となることの証明。

$$d(e^x)/dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

指数法則 $a^{(b+c)}=a^b \cdot a^c$ より

$$e^{(x+h)}-e^x/h=e^{(x+h)}-e^x=e^x\{e^h-1\}/h$$

そこで、 $p=e^h-1$ とおくと

$$\{e^h-1\}/h=p/\text{Log}(p+1)=1/\{1/p \cdot \text{Log}(p+1)\}=1/\text{Log}(p+1)^{(1/p)}$$

$h \rightarrow 0$ の時 $1/p \rightarrow$ 無限大であり、 $(p+1)^{(1/p)}$ は 自然対数 e の定義から e になる。そこで

$h \rightarrow 0$ の時 $\{e^h-1\}/h \rightarrow 1/\log(e)=1$ となるので、

$$d(e^x)/dx=\text{Lim}(h \rightarrow 0)e^x\{e^h-1\}/h=e^x$$

(証明 終り)

指数関数の複素変数への拡張

$\exp x$ の微分性質より、これをマクローリン展開すると、

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

となることから、定義域を、任意の実数から、複素数全体へと拡張することが出来る。上式の x に ix を代入することで、 $\exp x$ のマクローリン展開より $\exp(ix)$ を、 $\text{cis } x$ と書き、複素指数関数と呼ぶ。

$$\text{cis } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

右辺の第1項は $\cos x$ のマクローリン展開、第2項は $\sin x$ のマクローリン展開に i を乗じたものに他ならない。即ち、 $\exp ix = \cos x + i \sin x$ 。

オイラーの公式： $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$

この公式は、全く起源の異なる指数関数と三角関数が複素数の世界では密接に結びついていることを示していると見ることができる。たとえば三角関数の加法定理は、指数法則 $e^a \cdot e^b = e^{(a+b)}$ に対応していることが分かる。さらに

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

と置き換えることで、初等関数は全て指数関数の一部であるとみなすこともできる。

