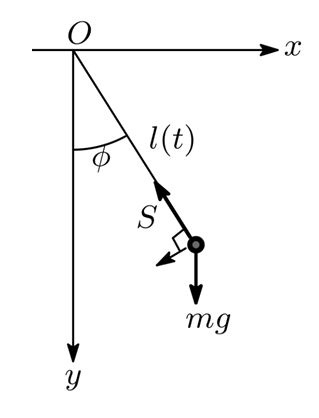
**単振子**

支点の位置をxy座標の原点に取るならば、鉛直からの振れ角をθとして

x= L sinθ

y= L cosθ

とする。

[](http://192.168.0.16/wiki/index.php?plugin=attach&refer=%E3%83%96%E3%83%A9%E3%83%B3%E3%82%B3&openfile=harmonic-oscillator.JPG)

時間的に変化するのはθだけであるので、この運動方程式を求める。

支店の、下方向にmgの[重力](http://192.168.0.16/wiki/index.php?%E9%87%8D%E5%8A%9B" \o "重力 (1125d))がかかるが、これをθ方向とL方向に分けて考える。 θ方向の加速度と[重力](http://192.168.0.16/wiki/index.php?%E9%87%8D%E5%8A%9B" \o "重力 (1125d))のつり合いは

m・d2（Lθ）/dt2＝　-mgsinθ　・・・　(0)

Lは一定値なので、変化しない。θのみ時間の関数ゆえ、整理すれば

単振り子の運動方程式は

d2θ/dt2 = -(g/L)sinθ　　・・・　(1)

L　：振り子の糸の長さ

θ：糸が鉛直方向となす振れの角

ｔ　：経過時間

ｇ　：重力の加速度(9.8)

と書ける。（振り子の質量(m)は振り子運動に影響しない）

この方程式は非線形であって、解析解は楕円関数で表現される。

　振れの角θが小さいとき、sinθ≒θとなり、(1)式は[単振動](http://192.168.0.16/wiki/index.php?%E5%8D%98%E6%8C%AF%E5%8B%95" \o "単振動 (390d))の式

d2θ/dt2 = -(g/l)θ　　・・・　(2)

となる。

(2)式の解は

θ＝2k・sin{√(g/l)・t}

となり。振幅(k)、周期(T = ２π√(g/l))の[単振動](http://192.168.0.16/wiki/index.php?%E5%8D%98%E6%8C%AF%E5%8B%95" \o "単振動 (390d))を表す。

**振り子の長さが変化する場合**

[ブランコ](http://192.168.0.16/wiki/index.php?%E3%83%96%E3%83%A9%E3%83%B3%E3%82%B3)では、θの方向に力を加えることができない。できるのは、重心の移動＝L方向の上下運動である。これは、Lを時間的に変化させることである。どのように変化させれば、[ブランコ](http://192.168.0.16/wiki/index.php?%E3%83%96%E3%83%A9%E3%83%B3%E3%82%B3" \o "ブランコ (307d))は揺れるか？ θ方向の角速度は[重力](http://192.168.0.16/wiki/index.php?%E9%87%8D%E5%8A%9B" \o "重力 (1125d))加速度で大きくなるが、重心の速度は v = Lθ である

おもりの角運動量はmＬ^２・dθ/dt　である。角運動量の微分は力のモーメントに等しいので

d（mＬ^２・dθ/dt）/dt＝　-mgL・sinθ

長さLも時間的に変化するとすれば,

2mL(dL/dt)(dθ/dt)+mＬ^２・d2θ/dt2 =-mgL・sinθ

となる。 整理して

d2θ/dt2 +(2/L)(dL/dt)(dθ/dt)+(g/L)sinθ = 0

θが十分小さい場合は、sinθ＝θとおけば、

d2θ/dt2 +(2/L)(dL/dt)(dθ/dt)+(g/L)θ = 0

2階の線形微分方程式である。 Lは時間ｔの関数であるので、たとえばL(t)を正弦波のような振動を加えることで、振り子の運動を制御できる。dθ/dtの係数は(2/L)(dL/dt)である。これが正の場合、減衰振動となる。[ブランコ](http://192.168.0.16/wiki/index.php?%E3%83%96%E3%83%A9%E3%83%B3%E3%82%B3" \o "ブランコ (307d))の長さを短くすれば　dL/dt<0　にできる。すなわち、立ち上がるタイミングを決めることで、振動を大きくできる。

**位置エネルギーを真下で加え（立ち上がり）、頂点でしゃがむとよい**

<http://www.page.sannet.ne.jp/ikenoue/type2/swing_rinji/ans/swing-a.html>